时光的笔记本

这是一本无趣的笔记本

作者：神了/时光

开始整理时间 2024.11.26

最近更新时间 2024.1.3

具体数学复习笔记

第一章

汉诺塔问题

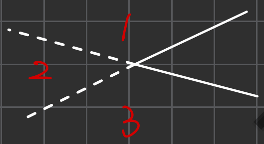
$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2^n - 1$$

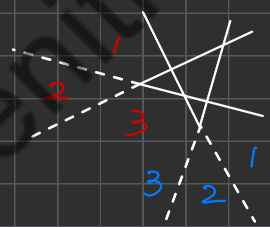
直线分块问题

$$L_0 = 1$$
$$L_n = L_{n-1} + n \Rightarrow L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

n个新交点，多出n+1个新平面

直线分块问题拓展





……

$$Z_n = L_{2n} - 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n = 2n^2 - n + 1$$

- 用圆、三角形、四边形切割平面，求解递推关系

圆：$L_1 = 2$

$L_2 = 2+2 = 4$

$L_3 = 4+4 = 8$

$L_4 = 8+6 = 14$

⋮

$L_n = L_{n-1} + 2(n-1)$

故 $L_n = 2 + \frac{(2+(n-1)2)(n-1)}{2}$

$= 2 + n(n-1)$

$= n^2 - n + 2$

三角形：$L_1 = 2$

$L_2 = 2+6 = 8$

$L_3 = 8+12 = 20$

⋮

$L_n = L_{n-1} + 6(n-1)$

故 $L_n = 2 + \frac{(6+6(n-1))(n-1)}{2}$

$= 2 + 3n(n-1)$

$= 3n^2 - 3n + 2$

四边形：$L_1 = 2$

$L_2 = 2+8 = 10$

$L_3 = 10+16 = 26$

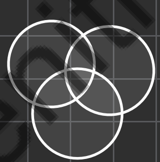
⋮

$L_n = L_{n-1} + 8(n-1)$

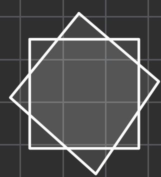
故 $L_n = 2 + \frac{(8+8(n-1))(n-1)}{2}$

$= 2 + 4n(n-1)$

$= 4n^2 - 4n + 2$



根据线与线的交点求递推式



约瑟夫问题

- 最简单的约瑟夫环(隔一个人杀一个人)

  $J(2^m+l)=2l+1$ 大概率只考最简单的

- $J(1)=1$

  $J(2n)=2J(n)-1$ $\Rightarrow$ eg. 计算 $J(1000000)$ 至少 <u>19</u> 次

  $J(2n+1)=2J(n)+1$

- 拓展：n个人中每m个杀掉，幸存者为 $f(n,m)$

  $f(n,m)=(f(n-1,m)+m)\%n$ (从0开始编号)

清单法

$$f(n)=A(n)\alpha+B(n)\beta+C(n)\gamma$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(1)&=\alpha \\ f(2n)&=2f(n)+\beta \\ f(2n+1)&=2f(n)+\gamma \end{aligned}}$$

通过 $f(n)$ 的不同式子代入求出 α、β、γ 的三组解，
再代入，求出 $A(n)$、$B(n)$、$C(n)$ 即可

约瑟夫问题拓展

$f(1)=\underbrace{3}_{\alpha_1}$ $f(2)=\underbrace{6}_{\alpha_2}$ $f(3)=\underbrace{9}_{\alpha_3}$

$f(4n)=8f(n)+\underbrace{1}_{\beta_0}$ $f(4n+1)=8f(n)\underbrace{-1}_{\beta_1}$

$f(4n+2)=8f(n)+\underbrace{2}_{\beta_2}$ $f(4n+3)=8f(n)\underbrace{-2}_{\beta_3}$

$f(27)$ ① 转成4进制 $f((1,2,3)_4)$

$\alpha_1 \downarrow \ \downarrow \beta_2 \ \downarrow \beta_3$

② 转成8进制 $(3,2,-2)_8$

③ 求解 $3\times8^2+2\times8^1+(-2)\times8^0=206$

第二章

和式的递推

$$a_nT_n = b_nT_{n-1}+C_n \xrightarrow{\text{转化为}} S_n = S_{n-1}+D_n$$

直接猜或直接代入即可

① $\Rightarrow$ $\dfrac{a_n^n}{b_n^n}T_n = \dfrac{a_n^{n-1}}{b_n^{n-1}}T_{n-1} + \dfrac{a_n^{n-1}C_n}{b_n^n}$ （直接猜出来的）

② $\Rightarrow$ $S_na_nT_n = S_nb_nT_{n-1}+S_nC_n$

本质是为了使下标对应，因此选择题代入即可

$S_nb_n = S_{n-1}a_{n-1}$ 　记 $M_n = S_na_nT_n$. 则

$$M_n = M_{n-1}+S_nC_n$$

$$M_n = S_0a_0T_0 + \sum_{k=1}^{n} S_kC_k = S_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} S_kC_k$$

$$T_n = \frac{1}{S_na_n}\left(S_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} S_kC_k\right)$$

其中 $S_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1}{b_nb_{n-1}\cdots b_2}$ ← 注意下标范围

③ 清单法，同上

附：调和数 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 　　$\sum_{0\le k<n} H_n = nH_n - n$

和式的运算

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k$$

$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k$$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}$$

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k + \sum_{k\in K\cup K'} a_k$$

tips：倒序相加

- 快速排序例子

$$C_0 = 0$$

$$C_n = n+1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad (n>0)$$

↑ n在分母先消掉

解：两边同乘 n，得

$$nC_n = n^2+n+2\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad ①$$

↖ 遇和式将 $\sum^{n}$ 与 $\sum^{n-1}$ 相减消去和式

用 $n-1$ 代替 n，得：

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2+n-1+2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \quad ②$$

将①-②，得：

$$nC_n-(n-1)C_{n-1} = 2n+2C_{n-1}$$

化简得：$nC_n = (n+1)C_{n-1}+2n$

⇒ 成 S_n 以便下标统一

令 $a_n=n \quad b_n=n+1 \quad c_n=2n$ 则：

$$S_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1}{b_n b_{n-1}\cdots b_2} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$故\quad C_n = \frac{1}{\frac{2}{n(n+1)}\cdot n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k+1}\right)$$

$$= 2(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$= 2(n+1)\left(H_n-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= 2(n+1)H_n-2n \qquad 得证$$

$$C_0 = 2\times1\times H_0-2\times0 = 0$$

$$C_1 = 2\times2\times H_1-2\times1 = 2 \qquad 成立$$

$$故\quad C_n = 2(n+1)H_n-2n$$

eg. $$\sum_{k\in K} a_k+\sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k+\sum_{k\in K\cup K'} a_k$$

推导过程：
$$\sum_{k\in K} a_k+\sum_{k\in K'} a_k = \sum_k a_k[k\in K]+\sum_k a_k[k\in K']$$

$$= \sum_k a_k([k\in K]+[k\in K'])$$

$$= \sum_k a_k([k\in K\cap K']+[k\in K\cup K'])$$

$$= \sum_k a_k[k\in K\cap K']+\sum_k a_k[k\in K\cup K']$$

$$= \sum_{k\in K\cap K'} a_k+\sum_{k\in K\cup K'} a_k$$

- 扰动法 S_{n+1}

① 分离首项 ② 分离尾项 ③ 联立求解

关键点：建立分离首项后的和式与分离尾项后的 S_n 之间的联系

eg: $S_n=\sum_{0\le k\le n} k\cdot 2^k$

① $S_{n+1} = 0\cdot 2^0 + \sum_{0\le k<n}(k+1)\cdot 2^{k+1}$

② $S_{n+1} = S_n + (n+1)\cdot 2^{n+1}$

关键：$\sum_{0\le k<n}(k+1)\cdot 2^{k+1} = \sum_{0\le k<n} k\cdot 2^{k+1} + \sum_{0\le k\le n} 2^{k+1}$

$= 2S_n + (2^{n+2}-2)$

③ $2S_n + (2^{n+2}-2) = S_n+(n+1)\cdot 2^{n+1}$

$\Rightarrow S_n=(n-1)2^{n+1}+2$

- 交换求和次序

$$\sum_j\sum_k a_{j,k}[P(j,k)] = \sum_j\Big(\sum_k a_{j,k}[P(j,k)]\Big)$$

独立的：$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} a_{j,k}$

嵌套的：$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}$

$\forall j,k,\ [j\in J][k\in K(j)] = [k\in K'][j\in J'(k)]$

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=j}^n a_{j,k} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^k a_{j,k}$$

eg. $S_n = \sum_{1\le j<k\le n} \frac{1}{k-j}$

①先对j求和，再对k求和

$S_n = \sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le j<k} \frac{1}{k-j}$　用k-j替换j，则：

$S_n = \sum_{1\le k\le n} \sum_{0<j\le k-1} \frac{1}{j}$　（同时简化j的上下界）

使用调和数记号：$S_n = \sum_{1\le k\le n} H_{k-1}$　（记$H_0=0$）

用k+1替换k，同时简化k的上下界，得：$S_n = \sum_{0\le k<n} H_k$

② 先对k求和，再对j求和，与①同

③ 直接以k+j代k，再先后对j、k求和，与①②同.

◦ 切比雪夫单调不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\le j<k\le n} (a_k-a_j)(b_k-b_j)$$

①若有 $a_1\le\cdots\le a_n$，$b_1\le\cdots\le b_n$，则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \le n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

②若有 $a_1\le\cdots\le a_n$，$b_1\ge\cdots\ge b_n$，则有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \ge n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

◦ 微分算子与差分算子

微分算子 D

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

差分算子 Δ

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

- 下降阶乘幂与上升阶乘幂

$$x^{\underline{m}} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}_{m个} \qquad \Delta(x^{\underline{m}}) = m x^{\underline{m-1}}$$

$$x^{\overline{m}} = \underbrace{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)}_{m个}$$

- 积分与求和

$$g(x) = Df(x) \qquad \int_a^b g(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$$g(x) = \Delta f(x) \qquad \sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$f(x+1) - f(x)$

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a\le k<b} g(k)$$

注意不含上界

- 下降阶乘幂的求和

$$\sum_{0\le k<n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$

eg: $$\sum_{0\le k<n} k^2 = \sum_{0\le k<n} k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}} = \sum_{0\le k<n} k^{\underline{2}} + \sum_{0\le k<n} k^{\underline{1}} = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

- 负指数下降阶乘幂

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$$

- 定和分中的特殊函数

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}$$

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_a^b, & m \ne -1 \\ H_x\Big|_a^b, & m = -1 \end{cases}$$

第三章

取整函数

$\lfloor x \rfloor$ 不大于 x 的最大整数，$\lceil x \rceil$ 不小于 x 的最小整数

$$x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$$

$$\left.\begin{aligned}\lceil -x \rceil &= -\lfloor x \rfloor \\ \lfloor -x \rfloor &= -\lceil x \rceil\end{aligned}\right\}$$ 两个取整函数是彼此关于原点对称的

$$\lfloor x \rfloor = n \iff n \le x < n+1$$

$$\lceil x \rceil = n \iff n-1 < x \le n$$

$\lfloor x+n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$，$\lceil x+n \rceil = n + \lceil x \rceil$，$n \in \mathbb{Z}$ → 整数可以提出

小数

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$，其中 $\lfloor x \rfloor$ 为 x 的整数部分，$\{x\}$ 为 x 的小数部分

一个结论

若 f(x) 连续且单调↑，若 f(x) 为整数则 x 为整数

则 $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$，$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$ 成立

证明：if $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \ne \lfloor f(x) \rfloor$. $\Rightarrow \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor < \lfloor f(x) \rfloor$

$\exists n$，$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor < n \le \lfloor f(x) \rfloor$

$$f(\lfloor x \rfloor) < \underset{\substack{\| \\ f(y)}}{n} < f(x) \Rightarrow \lfloor x \rfloor < y < x, \quad y \in \mathbb{Z}$$

不成立，故 $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$，$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$ 同理.

区间包含整数数

由闭变开，则上下取整相反，且减1

$[\alpha \dots \beta]$	$\lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1$	$\alpha \le \beta$
$[\alpha \dots \beta)$	$\lceil \beta \rceil - \lceil \alpha \rceil$	$\alpha \le \beta$
$(\alpha \dots \beta]$	$\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$	$\alpha \le \beta$
$(\alpha \dots \beta)$	$\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$	$\alpha < \beta$

↑ 选择题举个例子就行

- 实数的谱

定义实数α的谱为一个无限的整数多重集 允许有相同的元素

$$\mathrm{Spec}(\alpha)=\{\lfloor\alpha\rfloor,\lfloor 2\alpha\rfloor,\lfloor 3\alpha\rfloor,\cdots\}$$

易证当$\alpha\neq\beta$时，$\mathrm{Spec}(\alpha)\neq\mathrm{Spec}(\beta)$

- 取整函数的递归 （不易理解，我都不理解）

在约瑟夫问题中：若共有n个人，每3个人杀1个人，则：

$$N=\left\lfloor\frac{N-n-1}{2}\right\rfloor+N-n$$

N：此次编号　n：初始人数

拓展：若共有n个人，每q个人杀1个，则：

$$D=1$$
$$\text{while } D\le(q-1)n \text{ do } D=\left\lceil\frac{qD}{q-1}\right\rceil$$
$$J_q(n)=qn+1-D$$

- 同余 mod 运算

在正整数m除正整数n时，商可以用取整符号表示为$\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor$

而余数则记作 $n \bmod m$

$$n=\lfloor n/m\rfloor\times m+n \bmod m \iff n \bmod m=n-\lfloor n/m\rfloor\times m$$

可将"余数"的计算推广到负整数及至任意实数上：

$$x \bmod y=x-\lfloor x/y\rfloor\times y$$

$x \bmod y$ 的符号取决于 y 的符号

定义 $x \bmod 0=x$，　$x \bmod y$ 与 x 之差总为 y 的倍数

另一定义 $x \bmod 0=0$，　$\lim\limits_{y\to 0} x \bmod y=0=x \bmod 0$

mod 在此定义下，在0上是连续的

- mumble 运算

$$x \text{ mumble } y=y\cdot\lceil x/y\rceil-x$$

$$x \bmod y+x \text{ mumble } y=\begin{cases}0 & x\text{恰为}y\text{的整数倍}\\ y\end{cases}$$

- MOD的分配律

$$c(x \bmod y) = (cx) \bmod (cy)$$

mod 运算的优先级高于加减，低于乘除

- 均匀分组问题

对于 n 个东西，分成 m 组，尽可能地平均分

设 $n = qm + r$.　则：$q = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$，$r = n \bmod m$

若 $r=0$，正好可以平均分

若 $r>0$，每组先放 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 个，再把剩下 r 个逐个放入每一组

最多的组含 $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ 元素，有 $n \bmod m$ 组

最少的组含 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 元素，有 $m - n \bmod m$ 组

第 k 组有 $\lceil \frac{n-k+1}{m} \rceil$ 元素 $\Rightarrow n = \lceil \frac{n}{m} \rceil + \lceil \frac{n-1}{m} \rceil + \cdots + \lceil \frac{n-m+1}{m} \rceil$

- 由递增次序下的分组拓展至取整的求和

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil$$

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$$

第五章

二项式系数

将 C_n^k 记作 $\binom{n}{k}$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n^{\underline{k}}$$

二项式系数推广

$\binom{n}{k}$ 上指标 n 可为任意复数，记作 r

下指标 k 可为任意整数

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

用定义来考虑

这里不存在组合意义，可视为 r 的 k 次多项式

$\binom{r}{k}$ 为 $(1+x)^r$ 的泰勒展开式中 x^k 项的系数

$\downarrow$

$$(1+x)^r = 1 + \frac{r}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

无组合意义

二项式系数的性质

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$ $(x+y)^n$ 中令 $x=y=1$ 可证

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$ $(x+y)^n$ 中令 $x=-1,\ y=1$ 可证

通过 x, y 取不同值得到对应的式子

特殊值：$\binom{n}{0}=1$，$\binom{n}{1}=n$，$\binom{n}{n}=1$

对称等式：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ n 为非负整数

加法公式：$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

r 为实数 $\Rightarrow$

吸收公式：$\binom{r}{k}=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

相伴公式：$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}$ 实数 r，整数 $k \neq 0$

特殊值：$\binom{r}{0}=1$，$\binom{r}{1}=r$

加法公式：$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$. 上指数是实数也成立

注意：不同于上指数为非负整数 n 时，当上指数为实数 r 时

$\binom{r}{r}=1$，$\binom{r}{k}=\binom{r}{r-k}$ 不成立

下指数只能为整数
且下指数为0时也不成立

对称公式不成立

- 范德蒙卷积

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

- 母函数

序列 $<a_0, a_1 \dots a_n>$，构造函数 $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$

序列 $<1, 1, \cdots>$ 的母函数为 $1+z+z^2+\cdots = \frac{1}{1-z}$，$|z|<1$

序列 $<1, -1, 1, -1, \cdots>$ 的母函数为 $1-z+z^2-\cdots = \frac{1}{1+z}$，$|z|<1$

无穷级数

级常用到的母函数

序列 $<\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots \binom{n}{n}>$ 的母函数为 $A(z) = (1+z)^n$

有限序列与无限序列都有其对应的母函数

- 系数

设 $A(z)$ 为序列 $<a_0, a_1, a_2, \cdots>$ 的母函数，则 $[z^n]A(z) = a_n$，即 z^n 的系数

eg. $[z^m]\frac{1}{1-z} = 1$ $\qquad [z^m](1+z)^n = \begin{cases} \binom{n}{m}, & m \le n \\ 0, & m > n \end{cases}$

- 母函数的积

设 $A(z)$ 为序列 $<a_0, a_1, a_2 \cdots>$ 的母函数，

$B(z)$ 为序列 $<b_0, b_1, b_2 \cdots>$ 的母函数，则

$$A(z)B(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots$$

令 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，则 $[z^m]A(z)B(z) = c_n$

eg. 范德蒙卷积 $\underbrace{\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \overset{\Leftrightarrow}{=} \binom{r+s}{n}}$ 重要，正反推

证明：$(1+z)^r = \sum_k \binom{r}{k} z^k$ $\qquad (1+z)^s = \sum_k \binom{s}{k} z^k$

从而 $[z^n](1+z)^r(1+z)^s = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$

同时有 $[z^n](1+z)^{r+s} = \binom{r+s}{k}$

因此 $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{k}$

° 定理：（极重要的）

$$\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\ge 0}\binom{n+k}{n} z^k \qquad \text{整数 } n\ge 0$$

相当于偏移
再换元

$$\frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k\ge 0}\binom{k}{n} z^k \qquad \text{整数 } n\ge 0$$

可由牛顿二项式展开公式推导出.

$$(1+z)^r = \sum_{k\ge 0}\binom{r}{k} z^k \qquad |z|<1,\ r\text{ 为实数}$$

令 $z=-z \quad r=-n-1$

- 第六章

- 第二类斯特林数

符号 $\left\{ {n \atop k} \right\}$ 表示将一个有n个元素的集合划分成k个非空集合的方法数

eg. $\left\{ {4 \atop 2} \right\}$ 表示将4个元素分成两部分的方法数

有 $\{1,2,3\}\cup\{4\}$，$\{1,2,4\}\cup\{3\}$，$\{1,3,4\}\cup\{2\}$

$\{2,3,4\}\cup\{1\}$，$\{1,2\}\cup\{3,4\}$，

$\{1,3\}\cup\{2,4\}$，$\{1,4\}\cup\{2,3\}$

从而 $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$

第二类斯特林数没有直接求解的公式，仅有递推公式

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

① $k=0$ 时，规定 $\begin{cases} \left\{ {n \atop 0} \right\} = 1, & n=0 \\ \left\{ {n \atop 0} \right\} = 0, & n>0 \end{cases}$

② $k=1$ 时，规定 $\begin{cases} \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1, & n>0 \\ \left\{ {n \atop 1} \right\} = 0, & n=0 \end{cases}$

③ $k=n-1$ 时，只需从n个元素中随机选2个放入同一集合，

则 $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

④ $k=2$ 时，每个元素都有两种情况，共 2^n 种，减去空集的情况，

则为 2^n-2 种，同时集合间顺序无差异，还要再除以2，

因此 $\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1$

结合表格来通过递推式求解任意 $\left\{ {n \atop k} \right\}$

n<k

n≥k

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1	0		
1	0	1		
2	0	1 +	1 ×k	
3	0	1	3	1

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

第n个放到已分好的k堆中的一个.

第n个单独放一堆.

- 第一类斯特林数

符号 $\left[{n \atop k} \right]$ 表示 n个元素排成k个轮换的方法数

补充：轮换 A B C D 可写作 [A, B, C, D].

[A, B, C, D] = [B, C, D, A] = [C, D, A, B] = [D, A, B, C]

eg. $\left[{4 \atop 2} \right] = 11$

[1,2,3][4], [1,2,4][3] [1,3,4][2] [2,3,4][1]

[1,3,2][4], [1,4,2][3] [1,4,3][2] [2,4,3][1]

[1,2][3,4] [1,3][2,4] [1,4][2,3]

第一类斯特林数没有直接求解公式，仅有递推公式

$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right]$$

① k=0 时，规定 $\begin{cases} \left[{n \atop 0} \right] = 1 & n=0 \\ \left[{n \atop 0} \right] = 0 & n>0 \end{cases}$

② k=1 时，即 n个元素排成环 $\left[{n \atop 1} \right] = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

③ k=n 时，$\left[{n \atop n} \right] = 1$

④ $k=n-1$ 时，只需从 n 个元素随机选两个放入同一个集合

则 $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

结合表格来通过递推式求解任意 $\left[{n \atop k}\right]$

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1			
1	0	1		
2	0	1	1	
3	0	2	3	1

$n \le k$

$+$ $\times(n-1)$

$\left[{n \atop k}\right]$ $n=3$ $k=2$

- $\left[{n \atop k}\right] \ge \left\{{n \atop k}\right\}$　$k \ge 0$

$\left[{n \atop k}\right] = \left\{{n \atop k}\right\} = 0$　$k<0$　　$k=n, n-1, 0$ 时 $\left[{n \atop k}\right] = \left\{{n \atop k}\right\}$

- 拓展

eg. $x^{\overline{3}} = x^{1} + 3x^{2} + x^{3}$

$$x^n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k}\right] x^k$$

每种置换都对应一种轮换

$$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] = n!$$

轮换和　　置换数目

- 调和数

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad n!\,H_n = \left[{n+1 \atop 2}\right]$$

考 $H_n^{(r)} = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \cdots + \frac{1}{n^r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$　$r>1$ 收敛，$r\le 1$ 发散

$$\sum_{0 \le k < n} H_k = nH_n - n$$

$$\sum_{0 \le k < n} kH_k = \frac{n(n-1)}{2} H_n - \frac{n(n-1)}{4}$$

调和数的求和了解即可，考试不考

H_n 满足 $\ln n < H_n < \ln n + 1$

- 第八章

- 概率空间

  Ω：概率空间，ω：样本点，$Pr(\omega)$：ω 发生的概率

  显然有 $0 \le Pr(\omega) \le 1$，$\sum_{\omega \in \Omega} Pr(\omega) = 1$

  Ω 的子集：随机事件　　只包含一个样本点：基本事件

- 联合分布　　所有随机变量概率求和为1

  现有两个随机变量 X、Y，记 $Pr(X=x \text{ 且 } Y=y)$ 为 $Pr(X=x, Y=y)$

  More　$Pr(X_1=x_1, X_2=x_2 \cdots X_n=x_n) = Pr(x_1, x_2, \cdots x_n)$

  $\sum_{(x_1, x_2, \cdots x_n)} Pr(x_1, x_2, \cdots x_n) = 1$

- 独立性　$Pr(x,y) = Pr(x) \cdot Pr(y)$

  $Pr(x|y) = Pr(x)$

- 平均数、中位数、众数

- 期望和方差

  EX 是 X 的期望值

  $EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Pr(\omega)$

  $E(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) Pr(\omega) = EX + EY$　　不论 X、Y 是否独立都成立

  $E(\alpha X) = \alpha EX$

  $E(XY) = (EX)(EY)$　如果事件 X 与 Y 独立　　只有独立才成立

  VX 是 X 的方差

  $VX = E((X-EX)^2) = E(X^2 - 2X\,EX + (EX)^2)$

  $= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2$

  $= E(X^2) - (EX)^2$　一般都是用这个算

  $VX = EX^2 - (EX)^2$

  $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$　如果事件 X 与 Y 独立　　只有独立才成立

- 标准差

  $\sigma = \sqrt{V(X)}$

- 切比雪夫不等式

$$Pr((X-E(X))^2 \ge \alpha) \le \frac{V(X)}{\alpha}$$

$$Pr(|X-\mu| \ge c\sigma) \le \frac{1}{c^2}$$

概率分布围绕均值分布，前提是方差足够小

- 概率生成函数

$0 \le Pr(X=k) \le 1$ $\sum_k Pr(X=k)=1$

对随机变量X，假设它的值为非负数，则它的概率生成函数为 $G_X(z)=\sum_{k\ge0} Pr(X=k) z^k = E(z^k) = \sum_{w\in\Omega} Pr(w)\cdot z^{X(w)}$

任何概率生成函数都满足 $G_X(1)=\sum_{k\ge0}Pr(X=k)=1$

$$E(X)=\sum_{k\ge0} k\, Pr(X=k) = \sum_{k\ge0} Pr(X=k)\, k\cdot z^{k-1}\Big|_{z=1} = G_X'(1)$$

$$E(X^2)=\sum_{k\ge0} k^2 Pr(X=k) = \sum_{k\ge0} Pr(X=k)\left(k(k-1)z^{k-2}+k\cdot z^{k-1}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= G_X''(1)+G_X'(1)$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2 = G_X''(1)+G_X'(1)-[G_X'(1)]^2$$

X、Y不相关：$G_{X+Y}(z)=G_X(z)\,G_Y(z)$

$$H(z)=F(z)\cdot G(z)$$

$$E(X+Y)=H'(1)=F'(1)G(1)+F(1)G'(1)$$

$$= E(X)+E(Y)$$

↑ 同时也验证了

X、Y要相互独立

$$G(e^t)=\sum_{k\ge0}Pr(X=k)\,e^{kt}$$

$$= \sum_{k,m\ge0} Pr(X=k)\frac{k^m t^m}{m!}$$

$$= 1+\frac{\mu_1}{1!}t+\frac{\mu_2}{2!}t^2+\frac{\mu_3}{3!}t^3+\cdots$$

$$\mu_n=\sum_{k\ge0}Pr(X=k)\,k^n$$

◦ 抛硬币

正面 p (1)，背面 q (0)　　$p+q=1$

$$G_X(z)=\sum_{k\ge 0}\Pr(X=k)z^k=\Pr(X=0)z^0+\Pr(X=1)z^1$$
$$=q+pz$$

抛n次正面次数　$H(z)=(q+pz)^n=\sum_{k\ge 0}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}z^k$　二项分布

打出第一个正面　$pz+qpz^2+q^2pz^3+\cdots=\dfrac{pz}{1-qz}$

打出第n个正面　$\left(\dfrac{pz}{1-qz}\right)^n=p^nz^n\sum_k\binom{n+k-1}{k}(qz)^k=\sum_k\binom{k-1}{k-n}p^nq^{k-n}z^k$

$\left(\dfrac{pz}{1-qz}\right)^n=\sum_k\binom{n+k-1}{k}p^nq^kz^k$　　负二项分布

$E(n)=np$
$V(n)=npq$
二项分布

$E(n)=\dfrac{nq}{p}$
$V(n)=\dfrac{nq}{p^2}$
负二项分布，相当于抛了 $-n$ 次

15 道选择题　① 作业题
② 课件

大题